EXPERIMENTELLE UND THEORETISCHE UNTERSUCHUNG ÜBER DAS SELBSTPOTENTIAL.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
(SECTION II)

DER

KGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

GEORGE W. PATTERSON jun., M. A., B. Sc.,
AUS ANN ARBOR, U. S. A.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1899.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Inhalt.

Seite

§ 1. Einleitung 5

Erster Theil.

Vergleichung der Methoden von Maxwell und von Oberbeck.

§ 2. Die Maxwell'sche Methode 5
§ 3. Versuchsanordnung 6
§ 4. Beobachtungen 7
§ 5. Lord Rayleigh's Verbesserungen 7
§ 6. Aenderungen für den Gebrauch des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers 8
§ 7. Annahme einer kleinen Zeitconstante 9
§ 8. Empfindlichkeit und Dämpfung des Galvanometers 9
§ 9. Theorie des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers . . 11
§ 10. Correction der Schwingungsdauer wegen Dämpfung 12
§ 11. Correction der Amplitude wegen Dämpfung 13
§ 12. Gebrauch der Doppelamplitude 14
§ 13. Schema eines d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers . 15
§ 14. Wirkungen der Temperaturänderungen 17
§ 15. Beobachtungen bei maximalen und minimalen Temperaturen 18
§ 16. Schwingungsdauer des Galvanometers 19
§ 17. Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude und der Temperatur 19
§ 18. Correction wegen Ungleichförmigkeit des Feldes 21
§ 19. Messungen nach der Maxwell-Rayleigh'schen Methode . 23
§ 20. Die Oberbeck'sche Methode 27
§ 21. Beobachtungen und Resultate 30
§ 22. Vergleich der Vortheile der beiden Methoden 31
§ 23. Anwendung auf kleine Selbstpotentiale 32

Zweiter Theil.

Die Berechnung von Selbstpotentialen in Ausdrücken der Energie des magnetischen Feldes.

Seite

§ 24. Die drei von Maxwell vorgeschlagenen Methoden 33

§ 25. Ableitung der Gleichung $L = \int_{\infty}^{\cdot} \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{H}{I}\right)^2 dV$ 35

§ 26. Anwendung auf ein Solenoid von grosser Länge 36

§ 27. Anwendung auf ein Ringsolenoid von reckteckigem Querschnitt 37

§ 28. Anwendung auf ein Ringsolenoid von kreisförmigem Querschnitt 38

§ 29. Anwendung auf eine kreisförmige Rolle von rechteckigem Querschnitt 40

§ 30. Einführung von Kugelfunctionen 42

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Untersuchung über das Selbstpotential ist in zwei Abschnitte getheilt, einen experimentellen und einen theoretischen. In dem ersteren werden die Maxwell'sche und die Oberbeck'sche Methode, um das Selbstpotential aus Ohm und Secunde zu bestimmen, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendbarkeit auf kleine Selbstpotentiale, verglichen. Die Ursachen der jeder Methode anhaftenden Fehler werden ausführlich besprochen.

In Bezug auf die Maxwell'sche Methode habe ich eine etwas ausgedehnte Untersuchung über die Anwendung des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers als ballistisches Galvanometer gebracht.

Im zweiten Theile habe ich die Berechnung des Selbstpotentials von Rollen als Function der Energie, welche in dem magnetischen Felde vertheilt ist, gebracht. Ich bin mir nicht bewusst, dass diese Methode je vorher zur Berechnung des Selbstpotentials angewendet wurde, obgleich die Principien, auf welche sie gegründet ist, in den bekannten Werken über die Elektricität und den Magnetismus vollständig erklärt sind.

Erster Theil.

Die Vergleichung der Methoden von Maxwell und von Oberbeck.

§ 2. Die Maxwell'sche Methode.

Maxwell's Methode, das Selbstpotential aus dem Maass von Widerstand und Zeit zu bestimmen, ist in seiner Schrift über „A dynamical theory of the electromagnetic field“[1]) beschrieben.

Lord Rayleigh benutzte die Maxwell'sche Methode in verbesserter Form in seinen „Experiments to determine the

1) J. C. Maxwell, Phil. Trans. Roy. Soc. **155.** p. 475. 1865; J. C. Maxwell's Collected Papers. **1.** p. 547. 1890.

value of the British Association Unit of resistance in absolute measure". [1])

Zum Zweck meiner Untersuchung habe ich weitere kleine Aenderungen an der Methode vorgenommen und habe viel grössere Vorsicht angewandt, um eine gleichmässige Temperatur der Rollen zu erreichen.

§ 3. Versuchsanordnung.

Fig. 1 zeigt die von mir gewählte Versuchsanordnung, P ist die Rolle, deren Selbstpotential L gemessen werden soll, W_1, W_2, q_1 und q_2 sind Widerstände, deren Selbstpotential

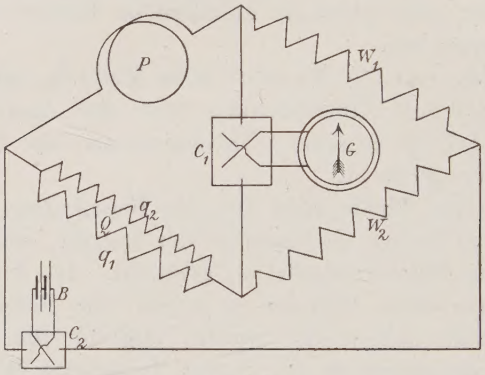

Fig. 1.

und Capacität möglichst klein sind; der Gesammtwiderstand von q_1 und q_2 (parallel geschaltet) ist Q. C_1 und C_2 sind Wippen, G ist ein ballistisches Galvanometer, und B ist eine Batterie, deren elektromotorische Kraft und Widerstand constant sind. Alle vier Widerstände P, Q, W_1, W_2 sollen einander so gleich sein als möglich. Q soll in seinen Abstufungen anpassbar sein. Das wird dadurch erreicht, dass man zwei Widerstände in Parallelschaltung anwendet. Wenn der Widerstand q_1 etwas grösser ist als der gewünschte Werth von Q ($= PW_2/W_1$), so ist es möglich, ein Gleichgewicht in der Wheatstone'schen Brücke zu erhalten dadurch, dass man

1) Lord Rayleigh, Phil. Trans. Roy. Soc. **173.** part 2. p. 661. 1882.

q_2 einen passenden grossen Werth giebt. Wegen seines grossen Werthes ist es möglich, q_2 mit grosser Genauigkeit anzupassen. Ueberdies kann die Wirkung des veränderlichen Contactwiderstandes zwischen den Stöpseln und den Klötzen des Widerstandskastens und zwischen den Leitungsdrähten und den Klemmschrauben weniger zur Geltung kommen.

§ 4. Beobachtungen.

In seiner ursprünglichen Methode beobachtete Maxwell α, die Ablenkung des ballistischen Galvanometers beim Schliessen des Kreises, wenn die Widerstände so angepasst waren, dass sie keinen dauernden Strom durch das Galvanometer gaben, und β, die grösste durch den dauernden Strom hervorgebrachte Ablenkung für den Fall, dass der Widerstand eines Zweiges im Verhältniss von 1 zu ϱ vergrössert wurde. Das Galvanometer wurde erst einige Zeit eingeschaltet, nachdem die Batterie geschlossen war. Es giebt die Formel:

$$(1) \qquad \frac{p}{P} = \frac{T}{\pi}(1 - \varrho)\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}.$$

p ist das Selbstpotential und P der Widerstand der zu messenden Rolle (gleich Q genommen), T ist die Schwingungsdauer des Galvanometers (die Hälfte der Umlaufszeit), und π die Ludolf'sche Zahl 3,14159... . Um die Wirkung des Widerstandes der Luft zu eliminiren, sollte β gleich 2α sein.

§ 5. Lord Rayleigh's Verbesserungen.

Lord Rayleigh lenkt die Aufmerksamkeit auf kleine Fehler in der Anwendung von $1 - \varrho$ in dieser Formel (1), und giebt eine andere Formel an ihrer Stelle, nämlich:

$$(2) \qquad \frac{L}{Q} = \frac{L}{P} = \frac{\Delta Q \chi' T \sin \frac{\alpha}{2}}{Q \chi \pi \operatorname{tg} \Theta}.$$

L ist das Selbstpotential der Rolle P; die Widerstände P und Q sind hier gleich. ΔQ ist die Aenderung in Q, um die dauernde Ablenkung Θ hervorzubringen; χ ist die Stromstärke in Q, wenn das Widerstandsgleichgewicht vollkommen ist. T und α sind wegen Dämpfung corrigirt. Die Ablenkung α wird

durch Umkehrung des Stromes der Batterie hervorgebracht. Falls der Stromkreis nur geschlossen oder unterbrochen wird, muss ein Factor 2 in den Zähler eingeführt werden.

§ 6. Aenderungen für den Gebrauch des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers.

Infolge magnetischer Störungen in dem Laboratorium fand ich es räthlich, ein d'Arsonval-Deprez'sches Galvanometer für meine Arbeit zu verwenden. Die Anwendung dieses Galvanometers kann eine Veränderung in der Formel (2) verlangen; diese setzt eine zum Cosinus der Ablenkung proportionale Ablenkungskraft und eine zum Sinus proportionale rücktreibende Kraft voraus.

Der erstere Zustand tritt ein, wenn das d'Arsonval-Deprez'sche Galvanometer ein gleichmässiges Feld senkrecht zur mittleren Ebene der aufgehängten Rolle hat; und der zweite tritt mit Annäherung ein, wenn die Aufhängung der Rolle bifilar ist.

Wenn das Feld gleichmässig ist und die Aufhängung unifilar und cylindrisch ist, lautet die Formel:

$$L = \Delta Q \frac{\chi' T \alpha \cos \Theta}{\chi \pi 2 \Theta} . \tag{3}$$

Es ist nämlich die Ablenkungskraft proportional dem Cosinus des Ablenkungswinkels (beim unveränderlichen Strom), und die rücktreibende Kraft proportional dem Winkel. Bei den ballistischen Ablenkungen nimmt man an, dass die Ablenkungskraft zu wirken aufgehört hat, ehe der Cosinus des Ablenkungswinkels wesentlich verschieden von Eins ist.

Wenn das Feld nicht gleichmässig und die Aufhängung bifilar ist, darf man die Formel schreiben:

$$L = \Delta Q \frac{\chi' T \sin \frac{\alpha}{2} \Psi(\Theta)}{\chi \pi \Theta} ; \tag{4}$$

worin $\Psi(\Theta)$ in der Weise eine Function von Θ ist, dass $\Theta / \Psi(\Theta)$ genau proportional zur Stromstärke ist. $\Psi(\Theta)$ wird gleich Eins für unendlich kleine Ablenkungen.

Wenn das Feld nicht gleichmässig und die Aufhängung unifilar und cylindrisch ist, lautet die Formel:

$$L = \Delta Q \frac{\chi' T a \Psi(\Theta)}{\chi \pi 2 \Theta}. \tag{5}$$

Bei der cylindrischen, unifilaren Aufhängung ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude; bei der bifilaren ist sie grösser für grössere Amplituden. Der Werth für T in den Formeln (2) und (4) ist der Werth für den sehr kleinen Ausschlag.

Die von mir benutzte Aufhängung war ein feines Kupferband, welches für grosse Amplituden gewissermaassen einer Bifilaraufhängung glich. Die Complicationen, welche diese Art der Aufhängung bedingen, werden weiter unten besprochen werden. Vgl. §§ 8 und 17.

§ 7. Annahme einer kleinen Zeitconstante.

In den vorhergehenden Formeln wird angenommen, dass die Schwingungsdauer des Galvanometers im Vergleich zu der Zeitconstante L / R des Systems so gross ist, dass der erzeugte Strom durch das Galvanometer geht, ehe die Rolle sich in einen Theil des Feldes geschwungen hat, in welchem die wirkende Componente einen wahrnehmbar verschiedenen Werth besitzt. Wenn das nicht so wäre, könnte ein bedeutender Fehler gemacht werden.[1]) In den vorliegenden Versuchen konnte dies deshalb nicht geschehen, weil L / R immer kleiner war als 0,001, und die Schwingungsdauer des Galvanometers grösser war als 12 Secunden.

§ 8. Empfindlichkeit und Dämpfung des Galvanometers.

Das Galvanometer, welches ich benutzte, war von Prof. Edelmann in München. Die Rolle war rechteckig, 8 cm lang und 2,5 cm breit. Sie bestand aus ungefähr 60 Windungen von ziemlich starkem Draht und hatte einschliesslich der Aufhängung einen Totalwiderstand von 4,24 Ohm. Ohne erhöhten Widerstand war das Instrument ganz aperiodisch. Bei diesem Versuche jedoch wurde es immer mit erhöhtem Widerstande

1) P. H. Ledeboer, La lumière Électrique **31.** p. 309. 1889.

angewendet. Um die Schwingungsdauer und die Empfindlichkeit zu vergrössern, ersetzte ich das vorherige Aufhängungsrohr durch ein doppelt so langes. Dann probirte ich verschiedene Aufhängedrähte von Kupfer, Messing, Platin und Eisen. Keiner ausser dem Eisendraht machte das Galvanometer empfindlich genug für meine Zwecke. Um die Rolle zu tragen, war sein Durchmesser nothwendigerweise sehr gross. Die Torsionskraft eines Drahtes ist dem Quadrat des Querschnittes proportional, während die Festigkeit nur der ersten Potenz proportional ist. Nach vielen Versuchen, in welchen der Eisendraht viele bemerkenswerthe Eigenschaften zeigte — nämlich eine Torsionsschwingungsdauer, welche von der Amplitude unabhängig war, und äusserst kleinen Temperaturwirkungen auf die Schwingungsdauer — wurde derselbe verworfen wegen der thermoelektromotorischen Kraft, welche durch die unvermeidlichen Temperaturunterschiede an seinen zwei Enden hervorgebracht wurde. Das schliesslich gewählte Kupferband gab die gewünschte Empfindlichkeit und war nahezu frei von thermoelektromotorischer Kraft. Ungenügende vorhergehende Versuche deuteten an, dass die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude war. Spätere Versuche bewiesen, dass dieser Schluss etwas fehlerhaft war. Vgl. § 17.

Wie sich aus der folgenden Darlegung ergeben wird, ist es nicht räthlich, die Empfindlichkeit des Galvanometers über einen gewissen Punkt hinaus dadurch zu erhöhen, dass man die Stärke des Feldes oder die Zahl der Windungen der Rolle vermehrt, da beides zu vergrösserter Dämpfung der Schwingungen führt. Wenn ein Galvanometer eigens für einen solchen Zweck gemacht würde, sollte es eine Rolle von grossem Trägheitsmoment, aber relativ kleiner Masse an einer langen cylindrischen Aufhängung von geringer Torsionskraft besitzen. Die Zahl der Windungen sollte klein und das Feld stark genug sein, um die gewünschte Empfindlichkeit zu geben. Diese Bedingungen sind einigermaassen widersprechend und werden nicht gestatten, dass dieses Galvanometer der Empfindlichkeit eines Nadelgalvanometers nahe komme. Ein solches Galvanometer ist jedoch viel ruhiger als ein Nadelgalvanometer, da es gegen magnetische und mechanische Störungen nahezu gesichert ist.

§ 9. **Theorie des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers.**

Wenn wir annehmen, dass die Luftreibung der Rolle der Winkelgeschwindigkeit proportional, dass das magnetische Feld um die Rolle constant ist, und dass die Zeitconstante der Rolle im Verhältniss zu der Schwingungsdauer gering ist (was der Forderung entspricht, dass die durch die Bewegung erzeugte elektromotorische Kraft in Phase mit dem Strom sei), können wir die Bewegungsformel der Rolle nach einem Impuls geben, wie folgt:

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\cos^2\Theta\right)\frac{d\Theta}{dt} + w\Theta = 0\,, \tag{6}$$

worin K das Trägheitsmoment der Rolle ist, Θ die Winkelablenkung, t die Zeit, F das Luftreibungsmoment bei der Einheitswinkelgeschwindigkeit, H die äquivalente Feldstärke um die Rolle (wir ziehen in Rechnung, dass die Rolle nicht aus einer Windung besteht), n die Zahl der Windungen, S die mittlere Windungsfläche, R der Widerstand des Stromkreises des Galvanometers, und w das Moment entsprechend der Torsion um die Einheit der Aufhängung. Alle diese Grössen müssen einem Einheitssystem angehören.

$$H\,n\,S\cos\Theta\,\frac{d\,\Theta}{d\,t}$$

ist die von der Bewegung der Rolle erzeugte elektromotorische Kraft;

$$\frac{H\,n\,S}{R}\cos\Theta\,\frac{d\,\Theta}{d\,t}$$

ist der hervorgebrachte Strom in der gleichen Phase angenommen, und

$$\frac{H^2 n^2 S^2}{R}\cos^2\Theta\,\frac{d\,\Theta}{d\,t}$$

ist das Verzögerungsmoment, welches auf die Rolle wirkt und dem erzeugten Strom entspringt.

Wenn Θ gering bleibt, so kann der Unterschied zwischen $\cos^2\Theta$ und der Einheit vernachlässigt werden, und die Bewegungsgleichung kann geschrieben werden wie folgt:

$$K\,\frac{d^2\,\Theta}{d\,t^2} + \left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)\frac{d\,\Theta}{d\,t} + w\,\Theta = 0. \tag{7}$$

Unter den Bedingungen, dass

$$F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R} < 4 w K$$

und $\Theta = 0$, wenn $t = 0$, ist die Lösung der Gleichung (7):

$$(8)\quad \Theta = \Theta_0 e^{-\frac{1}{2K}\left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right) t} \sin\left(\sqrt{\frac{w}{K} - \frac{1}{4K^2}\left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)^2}\, t\right).$$

Zur Vereinfachung kann dies geschrieben werden:

$$(9)\quad \Theta = \Theta_0 e^{-\frac{\Lambda t}{T_1}} \sin \frac{\pi t}{T_1}.$$

Dieses ist die Gleichung einer gedämpften harmonischen Bewegung. Θ_0 ist eine von Anfangsbedingungen abhängige Constante. T_1 ist die Schwingungsdauer und Λ ist der Logarithmus (Basis e) von λ (das Verhältniss von aufeinander folgenden Ablenkungen). Wenn

$$F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R} \geq 4 w K,$$

dann hören die Schwingungen auf, und die Bewegung wird aperiodisch. Das Galvanometer ist dann für ballistische Zwecke nicht geeignet.

§ 10. Correction der Schwingungsdauer wegen Dämpfung.

Die Schwingungsdauer ist, nach (8) und (9):

$$(10)\quad \begin{cases} T_1 = \dfrac{\pi}{\sqrt{\dfrac{w}{K} - \dfrac{1}{4K^2}\left(F + \dfrac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)^2}} \\ \quad = \pi \sqrt{\dfrac{K}{w}} \left(1 + \dfrac{1}{8 K w}\left(F + \dfrac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)^2 \text{etc.}\right). \end{cases}$$

Wenn es keine Dämpfung gäbe, würde die Schwingungsdauer:

$$(11)\quad T = \pi \sqrt{\frac{K}{w}}.$$

Deshalb

$$(12)\quad T_1 = T\left(1 + \frac{1}{8 K w}\left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)^2 \text{etc.}\right).$$

Aus den Gleichungen (8) und (9) ergiebt sich auch, dass

$$\frac{\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{T^2} - \frac{\Lambda^2}{T_1^2}},$$

mithin

$$T = T_1 \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}}. \tag{13}$$

Wenn die Dämpfung gering ist, kann der Unterschied zwischen T und T_1 gewöhnlich vernachlässigt werden. Bei starker Dämpfung ist es schwierig T mit Genauigkeit zu erhalten, da die Zahl der Schwingungen, welche man beobachten kann, sehr beschränkt ist. Aus diesem Grund habe ich vorgezogen, die Schwingungsdauer des Galvanometers bei offenem Stromkreise zu bestimmen, indem ich mich so einer geringen Dämpfung und einer lange andauernden Schwingung versicherte. Der Werth von T kann dann mit viel grösserer Genauigkeit berechnet werden.

Bei dieser Anordnung fand ich

$$\Lambda = 0{,}0287 \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}} = 0{,}999\,958,$$

d. h. der Unterschied zwischen T_1 und T kann vernachlässigt werden.

§ 11. Correction der Amplitude wegen Dämpfung.

Um die erste Ablenkung mit Rücksicht auf die Dämpfung zu corrigiren, ist es nothwendig zu wissen, welcher Bruchtheil Φ einer Schwingungsdauer zwischen einem Durchgang durch den Nullpunkt und der folgenden Elongation verfliesst. Zu diesem Zweck ist die Gleichung (9) zu betrachten.

$$\Theta = \Theta_0 e^{-\frac{\Lambda t}{T_1}} \sin \frac{\pi t}{T_1}. \tag{9}$$

Die Ablenkung ist Null, wenn t Null oder irgend ein ganzes Mehrfaches von T_1 ist. Für die Maximal- und Minimalwerthe muss die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\Theta}{dt} = \Theta_0 e^{-\frac{\Lambda t}{T_1}} \left(\frac{\pi}{T_1} \cos \frac{\pi t}{T_1} - \frac{\Lambda}{T_1} \sin \frac{\pi t}{T_1} \right) \tag{14}$$

gleich Null sein; oder

$$(15) \qquad \left(\operatorname{tg}\frac{\pi t}{T_1}\right)_{\frac{d\Theta}{dt}=0} = \operatorname{tg}(\pi\ \Phi) = \frac{\pi}{\Lambda},$$

und

$$(16) \qquad \pi\ \Phi = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda} = \operatorname{arc\,sin}\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{T}{T_1}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit am Anfang ist

$$(17) \qquad \left(\frac{d\,\Theta}{d\,t}\right)_{t=0} = \Theta_0\,\frac{\pi}{T_1}.$$

Wenn Θ' und Θ'_1 die Entfernung und die Amplitude mit eliminirter Dämpfung sind, und die anderen Bedingungen dieselben bleiben, dann ist

$$(18) \qquad \left(\frac{d\,\Theta}{d\,t}\right)_{t=0} = \Theta_0\,\frac{\pi}{T_1} = \Theta'_1\,\frac{\pi}{T} = \left(\frac{d\,\Theta'}{d\,t}\right)_{t=0}.$$

Daraus folgt, dass die erste Ablenkung Θ_1 wie folgt ausgedrückt wird:

$$(19) \qquad \Theta_1 = \Theta_0\,e^{-\Lambda\,\Phi}\sin\pi\ \Phi = \Theta'_1\,\frac{T_1}{T}\,e^{-\Lambda\,\Phi}\sin\pi\ \Phi = \Theta'_1\,e^{-\Lambda\,\Phi}.$$

Daher ist die erste, wegen Dämpfung corrigirte Amplitude

$$(20) \qquad \Theta'_1 = \Theta_1\,e^{\Lambda\,\Phi} = \Theta_1\,\lambda^{\Phi}.$$

Wenn A_0, A_1, A_2, ... A_n die aufeinander folgenden Amplituden in Scalentheilen (cm) zeigen, und A die erste, wegen Dämpfung corrigirte Amplitude, dann ist

$$(21) \qquad A = A_0\,\lambda^{\Phi},$$

in welchem

$$\lambda = \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \ldots = \sqrt[n]{\frac{A_0}{A_n}}. \quad \text{(Vgl. § 9.)}$$

Wenn die Dämpfung gering ist, ist Φ beinahe genau 0,5, und wir können es annähernd schreiben:

$$(22) \qquad A = A_0\sqrt{\lambda} = A_0\left(1+\frac{\Lambda}{2}\right) \quad \text{(beinahe)}.$$

§ 12. Gebrauch der Doppelamplitude.

Temperaturänderungen der Rollen und Thermoströme verursachen eine allmähliche Verschiebung des scheinbaren Nullpunktes des Galvanometers. Die daraus entstehenden Fehler kann man eliminiren, wenn Λ $(= \log\lambda)$ von den Doppelamplituden, welche dasselbe logarithmische Decrement wie die

Amplituden haben, gerechnet wird. Die erste corrigirte Amplitude ist:

$$(23) \qquad A = \frac{A_0 + A_1}{1 + \frac{1}{\lambda}} \lambda^{\Phi} = (A_0 + A_1) \frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda}.$$

Wenn das Decrement klein ist, kann man annähernd entweder

$$(24) \qquad A = (A_0 + A_1) \frac{\lambda}{2}$$

oder

$$(25) \qquad A = (A_0 + A_1) \frac{1 + \Delta}{2}$$

setzen.

In der vorliegenden Untersuchung war Δ zu gross, um diese Annäherungen zu erlauben. Zur Erklärung gebe ich zwei Beispiele, welche auf die in meinen Versuchen gefundenen Mittelwerthe von Δ gegründet sind.

Beispiel 1. Rolle 1 war in der Wheatstone'schen Brücke; der Widerstand des Galvanometerzweiges = 44,24 Ohm; $\Delta = 0{,}18\,025$; arctg $\pi / \Delta = 86^0\ 42'\ 58''$; $\Phi = 0{,}481\,756$. Die Resultate sind für den Factor nach den Formeln (23), (24) und (25):

$$(23) \quad \frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda} = 0{,}59\,438; \qquad (24) \quad \frac{\lambda}{2} = 0{,}59\,876;$$

$$(25) \quad \frac{1+\Delta}{2} = 0{,}59013.$$

Beispiel 2. Rolle 2 war in der Brücke; der Widerstand des Galvanometerzweiges war 24,24 Ohm; $\Delta = 0{,}403$; arctg $\pi / \Delta = 82^0\,42'$; $\Phi = 0{,}4594$. Die Resultate waren nach

$$(23) \quad \frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda} = 0{,}7775; \qquad (24) \quad \frac{\lambda}{2} = 0{,}7895;$$

$$(25) \quad \frac{1+\Delta}{2} = 0{,}7015.$$

§ 13. Schema eines d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers.

Viel von dem, was über den besten Querschnitt der Rolle des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers geschrieben

worden ist, obwohl scheinbar von allgemeiner Anwendbarkeit[1]), gilt für das ballistische Galvanometer nicht. Der gewöhnliche Schluss, dass die Rolle lang und schmal sein sollte, ist ohne Zweifel richtig für Galvanometer, welche zu jedem, ausgenommen ballistischem Gebrauche bestimmt sind. Eine solche Rolle ist höchst empfindlich, bewegt sich schnell, und hat starke Dämpfung. Die zwei letzten Eigenschaften sind bei einem ballistischen Galvanometer zu vermeiden; dieses soll empfindlich sein, und grosse Schwingungsdauer und mässige Dämpfung haben.

Betrachten wir diese drei Forderungen. Die Empfindlichkeit ist proportional dem Ausdrucke $H n S / w R$; die Schwingungsdauer ist annähernd proportional $\sqrt{K / w}$, und die Dämpfung pro Secunde ist proportional

$$\frac{1}{K}\left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right).$$

Es ist sofort verständlich, dass F und w klein und K gross sein müssen. Aenderungen der anderen Grössen bringen widersprechende Erfolge hervor; nämlich: entweder verstärken sie die Empfindlichkeit und die Dämpfung, oder sie verringern beides. Jedoch ergiebt sich, dass die Empfindlichkeit unverändert bleiben wird, wenn sowohl der Widerstand R als die Zahl der Windungen im gleichen Verhältniss verringert werden. $H^2 n^2 S^2$ wird auch in demselben Verhältniss, mit einer entsprechenden Verminderung der Dämpfung, verringert sein.

Es ist vortheilhafter n statt S oder H zu verringern, da sowohl die Zeitconstante als das Selbstpotential der Rolle n^2 annähernd proportional sind. Diese beide Grössen sollten selbstverständlich klein sein. Eine Verminderung von S hat eine ähnliche, obgleich kleinere Wirkung auf die Zeitconstante; sie würde aber auch das Trägheitsmoment zugleich mit der Masse vermindern, was ungünstig wäre. Wenn es aus irgend einem Grunde nicht thunlich ist, n oder S soviel wie gewünscht zu vermindern, dann wäre es gut, H zu verringern. Das habe ich gethan dadurch, dass ich ein paar Magnete von dem

1) A. Gray, The theory and practice of absolute measurements in electricity and magnetism, 2. part 2, p. 378, 1893; T. Mather, Phil. Mag. p. 434. May 1890.

Galvanometer entfernt habe. Nachdem ich die frühere Empfindlichkeit durch Aenderung des Widerstandes des Galvanometerzweiges wieder hergestellt hatte, fand ich, dass die Dämpfung in dem erwarteten Verhältniss verringert war.

§ 14. Wirkungen der Temperaturänderungen.

Der praktischen Anwendbarkeit der Maxwell'schen Methode bei kleinen Selbstpotentialen setzen sich wegen der Fehler infolge Temperaturänderungen bedeutende Schwierigkeiten entgegen. Dies ist besonders der Fall, wenn die Zeitconstante der Rolle klein ist; denn die zufällige Aenderung in P infolge Aenderung der Temperatur kann gleich einem bedeutenden Theile der absichtlichen Aenderung ΔQ in Q sein. Diese Schwierigkeit hat Lord Rayleigh bei einer Rolle des Selbstpotentials $L = 0{,}24$ Henry, und Widerstand $R = 23{,}65$ Ohm, oder Zeitconstante $L/R = 0{,}01\,015$ sec, getroffen. Er sagt: „As precautions against rapid changes of temperature the copper coils were wrapped thickly round with strips of blanket and deposited in a closed box. The delicacy of our arrangement was such that about $^1/_{1000}$ of a degree contigrade would manifest itself, so that it was hopeless to try to maintain the resistance balance absolutely undisturbed."

Wenn alle gebrauchten Rollen denselben Temperaturcoefficienten hätten, würde diese Schwierigkeit nicht auftreten. Es giebt jedoch keinen Stoff, welcher zum Gebrauche in Widerstandskästen geeignet und in Rollen von grossem Selbstpotential anwendbar wäre. Reines Kupfer, obwohl es einen Temperaturcoefficienten von 0,4 Proc. pro Grad Celsius hat, ist der einzige für solche Rollen geeignete Stoff.

Meine Versuche wurden an zwei Kupferdrahtrollen angestellt, deren Selbstpotential und Widerstand folgende waren: Rolle 1, $L = 0{,}0438$ Henry, $R = 20{,}5$ Ohm, $L/R = 0{,}00\,214$ sec; Rolle 2, $L = 0{,}00\,585$ Henry, $R = 7{,}28$ Ohm, $L/R = 0{,}00\,080$ sec.

Es war zu erwarten, dass bei Rollen von so kleiner Zeitconstante die Schwierigkeiten viel schärfer hervortreten würden, als sie es in dem Falle waren, den Lord Rayleigh behandelte.

Der Raum, in welchem die vorliegenden Versuche angestellt wurden, war mit einem Gasofen geheizt, und zuerst wurde versucht, eine constante Temperatur zu erhalten da-

durch, dass man das Zuströmen des Gases regelte. Es wurde bald gefunden, dass eine Temperaturänderung von 0,1° pro Stunde in der Kupferrolle häufig grosse Fehler in dem Endresultat verursachte.

Um eine wahrnehmbar beständige Temperatur der Kupferrollen zu erhalten, wurden sie in ein grosses Glas gebracht, welches in ein noch grösseres mit Wasser gefülltes Glasgefäss gestellt wurde. Das Wasser besass die Temperatur der Umgebung, und die Rollen wurden mit Baumwollabfall in einer Höhe von 15 cm bedeckt. Nach ungefähr einer Stunde wurde die Temperatur ziemlich beständig. Wenn die Temperatur des Zimmers so constant als durchführbar gehalten wurde, so konnte man einigermaassen übereinstimmende Resultate erzielen. Ich versuchte auch das Glas in schmelzenden Schnee zu stecken, aber die Resultate waren weniger übereinstimmend. Wahrscheinlich verhinderte der Schnee den Umlauf des entstandenen Wassers, sodass das letztere thatsächlich wärmer wurde als der Schnee. Der grosse Temperaturunterschied zwischen der Rolle und dem übrigen Kreise verursachte überdies eine thermoelektromotorische Kraft.

§ 15. **Beobachtungen bei maximalen und minimalen Temperaturen.**

Schliesslich wurde zu einem sehr einfachen Hülfsmittel gegriffen, und vollständige Beherrschung der Temperaturwirkungen erreicht. Wenn die Temperatur des Wassers in dem Gefäss gefallen war, so war die zurückbleibende Temperatur der Rolle höher. Wenn die Luft in der Nähe des Gefässes etwas erhitzt wurde, so wurde die fallende Temperatur des Wassers allmählich zum Steigen gebracht. Die Temperatur der Rolle ging dann sehr langsam durch einen Minimalwerth. Während die Temperatur durch dieses Minimum ging, war Gelegenheit zu einer Reihe von durch Temperaturänderung nicht gestörten Beobachtungen gegeben.

Nachdem diese Reihe vollendet war, wurde eine andere angefangen, nachdem entweder die Batterie, das Galvanometer, oder beide umgeschaltet waren. Diese vier bildeten thatsächlich eine Gruppe, welche von den durch thermische Wirkungen verursachten Unregelmässigkeiten und der Asymmetrie des Galvanometerfeldes etc. frei war. Während der Beobach-

tungen wurde die Temperatur des Zimmers so geregelt, dass die Maximal- und Minimalwerthe der Temperatur der Rolle einander folgten. Ein empfindliches Thermometer wurde während des Experimentes nahe an die Kupferrollen gehalten. Zwischen den Maximal- und Minimalwerthen der Temperatur konnte keine Aenderung in den Angaben des Thermometers entdeckt werden. Die Gesammtänderung war annähernd 0,01° C.

§ 16. Schwingungsdauer des Galvanometers.

Wie in § 10 erklärt ist, war die Schwingungsdauer des Galvanometers bei offenem Stromkreise bestimmt. In den Hauptbeobachtungen (mit Rolle 1) war die corrigirte Schwingungsdauer 12,190 Secunden. Nach diesen wurde die Spannung der Aufhängung dadurch beseitigt, dass die Rolle auf ihre Stütze heruntergelassen wurde. Für die späteren Beobachtungen (mit Rolle 2) wurde sie wieder in die Höhe gezogen, aber wahrscheinlich etwas verschieden von der vorherigen Höhe. Aus diesem vermuthlichen Unterschied in der Höhenstellung der aufgehängten Rolle entstand eine Veränderung in der Kupferbandspirale darunter, welche als Rückverbindung der Rolle diente, und deshalb eine kleine Veränderung der Schwingungsdauer. Der neue Werth war 12,115 Secunden.

§ 17. Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude und der Temperatur.

Wie in § 8 erwähnt ist, wurde auf ungenügenden Beweis hin angenommen, dass die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude sei. Genaue Versuche ergaben, dass die Schwingungen bei einer Drahtaufhängung isochron in den Grenzen von Beobachtungsfehlern sind, wenn die Temperatur constant bleibt. Ein Kupferband jedoch scheint nicht die gleichen Vortheile zu bieten. Glücklicherweise ist für Amplituden, wie ich sie benutzte (weniger als 22 cm bei einem Scalenabstand von 270 cm), die Abweichung in der Schwingungsdauer gering. Das Kupferband wirkt in gewisser Beziehung als bifilare Aufhängung, für welche das zurücktreibende Drehungsmoment dem Sinus der Winkelablenkung entspricht, wenn der Winkel klein ist, während ein cylindrischer Draht ein dem Winkel entsprechendes zurücktreibendes Drehungsmoment bringt.

Die Wirkung der Temperaturänderung auf die Schwingungsdauer ist fast eine lineare Function der Temperatur.[1]) Eine Temperaturerhöhung bringt eine Ausdehnung sowohl des Querschnitts als der Länge der Aufhängung hervor. Die einander entgegengesetzten Wirkungen dieser Ausdehnung würden eine Verminderung der Schwingungsdauer verursachen, wenn nicht die begleitende Vermehrung des Trägheitsmomentes, welche auch von der Ausdehnung und der Aenderung in dem Torsionsmodulus des Aufhängemateriales herrührt, es verhinderte. Diese letzten Wirkungen erhalten das Uebergewicht und daraus entsteht eine geringe, dem Wachsen der Temperatur proportionale Zunahme der Schwingungsdauer. Glücklicherweise ist die Aenderung nicht gross, da es fast unmöglich wäre, die Temperatur der Aufhängung mit Genauigkeit zu bestimmen, wenn die Temperatur der Umgebung nicht constant wäre.

Die folgende Tab. 1 (vgl. p. 21) zeigt die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude und der Temperatur. Das logarithmische Decrement wird auch gegeben. Die Entfernung zwischen Galvanometer und Scala war 270 cm.

Um die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude zu zeigen, fand ich es nöthig, kurze Zwischenzeiten zu gebrauchen. Deshalb können die Schwingungsdauern fehlerhaft bis zu 0.1 Proc. sein. Sie sind jedoch hinreichend genau, um klar zu zeigen, dass die Schwingungsdauer zuerst langsam und darauf schneller mit der Amplitude zunimmt.

Die Schwingungsdauer nimmt auch mit der Temperatur deutlich zu, und zwar ungefähr um 0,004 Secunden oder 0,03 Proc. pro Grad.

Wie zu erwarten, ist das logarithmische Decrement grösser, wenn die Schwingungsdauer grösser ist. Es entsteht auch ein Zuwachs in dem logarithmischen Decrement mit der wachsenden Amplitude, da grosse Schwingungen mehr und mehr von einer einfachen harmonischen Bewegung abweichen, nämlich: die zurücktreibende Kraft wächst in geringerem Grade als die Abweichung. Das in der angeführten Tabelle gegebene logarithmische Decrement ist in keinem Falle gross genug, um die Schwingungsdauer wahrnehmbar zu berühren. Vgl. § 10.

1) G. W. Patterson and K. E. Guthe, Phys. Rev. 7. p. 274. 1898.

Tabelle 1.

Nummer der Doppelamplituden	Doppelamplituden	Log. Doppelamplituden (Basis 10)	Logarithmisches Decrement (Basis 10)	Logarithmisches Decrement (Basis e)	Zwischenzeit sec	Schwingungsdauer sec	Temperatur (Celsius)
1	86,85	1,938770					
31	34,80	1,541579	0,013239	0,030484	365,2	12,173	22,0°
35	30,93	1,490380					
65	12,75	1,105510	0,012829	0,029540	364,6	12,153	22,0
72	10,66	1,027757					
100	4,68	0,670246	0,012765	0,029393	364,2 [1]	12,140	22,0
1	84,98	1,929317					
27	39,55	1,597146	0,012776	0,029418	316,3	12,165	15,9
31	35,22	1,546789					
57	16,79	1,225051	0,012374	0,028492	315,6	12,138	16,0
61	14,97	1,175222					
87	7,18	0,856124	0,012273	0,028260	315,6	12,138	16,1
93	6,09	0,784617					
119	2,97	0,472756	0,011995	0,027620	315,0	12,115	16,2
125	2,50	0,397940					
151	1,21	0,082785	0,012121	0,027910	315,0	12,215	16,2
1	93,45	1,970579					
21	52,88	1,723291	0,012364	0,028469	242,5	12,125	9,15
25	47,30	1,674861					
45	27,27	1,435685	0,011959	0,027537	242,0	12,100	9,17
49	24,47	1,388634					
69	14,24	1,153510	0,011756	0,027069	241,5	12,075	9,20
73	12,77	1,106191					
93	7,46	0,872739	0,011673	0,026878	241,5	12,075	9,20
97	6,69	0,825426					
117	3,92	0,593286	0,011607	0,026726	241,5	12,075	9,20

§ 18. Correction wegen Ungleichförmigkeit des Feldes.

Die Gleichungen (4) und (5) § 6 schliessen eine unbekannte Function $\Psi(\Theta)$ der Ablenkung ein, welche experimentell bestimmt werden muss. Wie in § 6 erwähnt, wird diese Function gleich $\cos\Theta$, wenn das Feld gleichförmig ist. In den folgenden Tab. 2 u. 3 werden die Daten und Resultate für die beiden

1) Von der 70. bis zu der 100. Doppelamplitude.

Beobachtungsfolgen gegeben. Der Strom wurde in jedem Falle um bekannte Beträge vergrössert und die Ablenkungen angegeben. Jede Reihe ist der Mittelwerth zweier in entgegengesetzter Ordnung genommener, um fortschreitend verändernde Wirkungen zu eliminiren, wie allmähliche Veränderung der Temperatur der Batterie und der Rollen, und die Polarisation der Batterie. In keinem Falle waren weniger als 10 000 Ohm im Kreise.

Tabelle 2.

Relativ-strom	Ablenkung in cm		Mittlere Ablenkung		Secunden ÷ Strom	$\Psi(\Theta)$ Verhältniss zum ersten	Cosinus des Ablenkungswinkels
	linke	rechte	cm	sec[1])			
2	6,56	6,59	6,575	2511,0	1255,5	1,0000	0,9999
3	9,85	9,89	9,870	3768,5	1256,2	1,0006	0,9998
5	16,63	16,525	16,477	6286,0	1257,2	1,0014	0,9995
7	22,99	23,175	23,082	8795,4	1256,5	1,0009	0,9991
9	29,59	29,895	29,742	11315,0	1257,2	1,0014	0,9985
11	36,20	36,62	36,410	13824,0	1256,7	1,0010	0,9977
13	42,79	43,435	43,112	16329,5	1256,1	1,0005	0,9969

Tabelle 3.

Relativ-strom	Ablenkung in cm		Mittlere Ablenkung		Secunden ÷ Strom	$\Psi(\Theta)$ Verhältniss zum ersten	Cosinus des Ablenkungswinkels
	linke	rechte	cm	sec[1])			
1	4,142	4,092	4,117	1572,3	1572,3	1,0000	1,0000
2	8,240	8,230	8,235	3144,6	1572,3	1,0000	0,9999
3	12,321	12,416	12,368	4720,9	1573,6	1,0008	0,9997
4	16,443	16,573	16,508	6297,7	1574,4	1,0013	0,9995
5	20,560	20,765	20,662	7876,9	1775,4	1,0020	0,9993
6	24,680	24,96	24,820	9453,9	1575,6	1,0021	0,9990
7	28,835	29,142	28,988	11030,3	1575,8	1,0023	0,9986
8	32,952	33,385	33,168	12606,0	1575,7	1,0022	0,9981
9	37,070	37,630	37,350	14176,6	1575,2	1,0019	0,9976
10	41,225	41,925	41,575	15756,7	1575,7	1,0022	0,9971

1) Die Entfernung zwischen Galvanometer und Scala war 270 cm.

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass die Rolle bei der Ablenkung sich in ein stärkeres Feld bewegte, weil die Ablenkungen schneller zunahmen als die Ströme; in einem gleichmässigen Felde würden die Ablenkungen langsamer zunehmen als die Ströme, da die Neigung der Rolle zu dem Feld einen Factor $\cos\Theta$ einführt. Bei ungefähr 2,5° erreicht die thätige Komponente ihren höchsten Werth, und erfährt jenseits dieses Punktes eine Abnahme in dem Verhältniss der Ablenkung durch den Strom.

Da der Nullpunkt nicht genau der gleiche für die verschiedenen Beobachtungen war, so konnte nicht erwartet werden, dass die Resultate genau übereinstimmen würden. Ausser einer geringen, von Tag zu Tag fortschreitenden Veränderung veränderte sich der Nullpunkt mit der Temperatur um $^1/_4$ cm pro Grad. Die Einheit des Stromes ist in den zwei Tabellen verschieden.

Die letztere Tabelle (3) wurde den Correctionen zu Grunde gelegt, da die Bedingungen, unter welchen man sie erhielt, für günstiger betrachtet wurden, als diejenigen der früheren. $\Psi(\Theta)$ ist das Verhältniss in der Tabelle, so corrigirt, dass sein Werth, dem unendlich schwachen Strom entsprechend, gleich Eins war. Diese Function, für $\Theta = 0$, muss durch ein Maximum oder ein Minimum gehen, da sie auf den durch Plus- und Minusablenkungen erhaltenen Durchschnittswerth gegründet ist. Die Ablenkungen als Functionen des Stromes müssen der Natur der Sache nach durch schwach gekrümmte Curven dargestellt werden. Da sich aus den Tabellen ein Maximalwerth zwischen 2° und 3° ergiebt, so dürfte $\Theta = 0$ dem Minimalwerth des Verhältnisses entsprechen. Es ist bei dieser Berechnung angenommen worden, dass der Werth des Verhältnisses thatsächlich nicht zwischen seinem Minimalwerth für $\Theta = 0$ und dem für die erste Ablenkung ($\Theta = 1572{,}3''$) gegebenen Werth verändert werden kann. Deshalb sind die in der Tabelle gegebenen Werthe des Verhältnisses für $\Psi(\Theta)$ der Gleichung (25) genommen worden.

§ 19. **Messungen nach der Maxwell-Rayleigh'schen Methode.**

Ich komme nun zu den Messungen (mit Rolle 1), bei welchen ich meine Modification der Maxwell-Rayleigh'schen

Methode anwendete. Die Tabellen geben die beobachteten Grössen und die berechneten Resultate folgen. Der Widerstand des Galvanometerzweiges war 24,44 Ohm und die Entfernung zwischen Galvanometer und Scala war 270 cm. Tabelle 4 giebt die Ablesungen und Doppelamplituden, welche man bei der Umschaltung der Batterie für jede der vier Vertauschungen der Batterie- und Galvanometerverbindungen erhält. Tab. 5 giebt die entsprechenden andauernden, durch die Aenderung des Widerstandes Q in $Q + \Delta Q$ hervorgebrachten Ablenkungen. Q ist der Gesammtwiderstand von q_1 und q_2 (parallel geschaltet), und $Q + \Delta Q$ ist der von q_1 und q_2.

Tabelle 4.

Erste Folge, Rolle 1, 3. Januar 1899.

(1)		(2)		(3)		(4)	
Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)
45,11 [1])	—	45,49 [1])	—	44,96 [1])	—	44,71 [1])	—
67,13	—	23,93	—	23,515	—	66,60	—
27,22	39,91	63,82	39,89	63,43	39,915	26,76	39,84
60,65	33,43	30,30	33,52	29,40	34,03	60,18	33,42
32,81	27,84	—	—	57,76	28,36	32,39	27,79
56,10	23,29	34,76	—	34,45	23,31	55,67	23,28
36,70	19,40	54,18	19,42	53,85	19,40	36,28	19,39
52,93	16,13	37,90	16,28	37,59	16,26	52,53	16,25
39,405	13,525	51,43	13,53	51,13	13,54	39,01	13,52

Tabelle 5.

	(1)	(2)	(3)	(4)
q_1 (in Ohm)	21,1	21,1	21,1	21,1
q_2 „ „	1758,8	1771,4	1793,4	1800,7
q_2' „ „	1518,8	1531,4	1553,4	1560,7
Q „ „	20,84987	20,85163	20,85464	20,85562
ΔQ „ „	0,03898	0,03840	0,03740	0,03708
Nullpunkt	46,422	44,50	44,31	45,787
Ablesung	87,68	4,515	5,375	84,935
Ablenkung	41,258	39,985	38,935	39,148

1) Nullpunkt.

Das logarithmische Decrement

$$\Delta = \log \lambda = 0{,}180253, \quad \lambda = 1{,}19752, \quad \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\Delta} = 86^0\,42'\,58'',$$

$$\Phi = 0{,}481\,756, \quad \frac{\lambda^{\Phi+1}}{\lambda+1} = 0{,}59438;$$

erste mittlere Doppelamplitude gleich $A_0 + A_1 = 39{,}889$ cm;
erste wegen Dämpfung corrigirte Amplitude

$$A = (A_0 + A_1)\frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda} = 23{,}715 \text{ cm}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{23{,}715}{270},$$

$$\alpha = 2^0\,30'\,35{,}3'';$$

erste mittlere Ablenkung

$$B = 39{,}832 \text{ cm}, \quad \operatorname{tg} 2\Theta = \frac{39{,}832}{270}, \quad \Theta = 4^0\,11'\,40{,}7'',$$

$$\Psi(\Theta) = 1{,}002;$$

Schwingungsdauer $T = 12{,}190$ sec,

Hülfswiderstände der Wheatstone'schen Brücke

$W_1 = W_2 = 94{,}07$ Ohm, $\Delta Q = 0{,}037965$ Ohm, $\frac{\chi'}{\chi} = 0{,}99966$;

Widerstand des Galvanometerzweiges $= 44{,}24$.

$$L_1 = \Delta Q \frac{\chi' T \alpha \Psi(\Theta)}{\chi \pi 2 \Theta} = 0{,}043705 \text{ Henry}.$$

Tabelle 6.

Zweite Folge, Rolle 1, 4. Januar 1899.

(1)		(2)		(3)		(4)	
Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)
45,76 [1]	—	46,11 [1]	—	46,32 [1]	—	46,08 [1]	—
67,40	—	24,54	—	24,89	—	67,78	—
27,39	40,01	64,42	39,88	64,83	39,94	27,86	39,92
60,90	33,51	30,94	33,48	31,28	33,55	61,32	33,46
32,96	27,94	58,75	27,81	59,17	27,89	33,48	27,84
56,31	23,35	35,43	23,32	35,78	23,39	56,78	23,30
36,83	19,48	54,83	19,40	55,23	19,45	37,40	19,38
53,10	16,27	38,59	16,24	38,93	16,30	53,62	16,22
39,51	13,59	52,10	13,51	52,48	13,55	40,11	13,51

1) Nullpunkt.

Tabelle 7.

	(1)	(2)	(3)	(4)
q_1 (in Ohm)	21,1	21,1	21,1	21,1
q_2 „ „	1792,3	1792,0	1797,9	1803,9
q_2' „ „	1552,3	1552,0	1557,9	1563,9
Q „ „	20,85449	20,85445	20,85525	20,85605
ΔQ „ „	0,03745	0,03746	0,03720	0,03694
Nullpunkt	45,93	45,513	45,92	46,785
Ablesung	85,43	6,545	7,185	85,75
Ablenkuug	39,50	38,968	38,735	38,965

$\lambda = 1{,}19755$, $A = 0{,}180277$, $\Phi = 0{,}48175$, $\frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda} = 0{,}59439$;

$A_0 + A_1 = 39{,}9375$, $A = 23{,}74$, $\alpha = 2^0\,30'\,39{,}2''$, $B = 39{,}042$;

$\Theta = 4^0\,06'\,50{,}0''$, $\Psi(\Theta) = 1{,}002$, $T = 12{,}190$, $W_1 = W_1 = 94{,}07$;

$\frac{\chi'}{\chi} = 0{,}99966$, $G = 44{,}24$, $\Delta Q = 0{,}03726$.

$L_1 = 0{,}04375$ Henry.

Tabelle 8.

Dritte Folge, Rolle 1, 4. Januar 1899.

(1)		(2)		(3)		(4)	
Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)
45,90 [1])	—	46,51 [1])	—	46,63 [1])	—	46,275 [1])	—
67,60	—	25,21	—	25,11	—	68,19	—
27,79	39,81	64,99	39,78	64,95	39,84	28,35	39,84
61,21	33,42	31,51	33,48	31,45	33,50	61,73	33,38
33,43	27,78	59,29	27,78	59,28	27,83	33,97	27,76
56,73	23,30	35,97	23,32	35,94	23,34	57,23	23,26
37,37	19,34	55,34	19,37	55,32	19,38	37,87	19,36
53,63	16,26	39,08	16,26	39,04	16,28	54,11	16,24
40,10	13,53	52,59	13,51	52,55	13,51	40,59	13,52
51,47	11,37	41,21	11,38	41,20	11,35	51,94	11,35

1) Nullpunkt.

Tabelle 9.

	(1)	(2)	(3)	(4)
q_1 (in Ohm)	21,1	21,1	21,1	21,1
q_2 „ „	1942,0	1963,9	1977,7	1990,0
q_2' „ „	1642,0	1663,9	1677,7	1690,0
Q „ „	10,87321	20,87572	20,87726	20,87863
ΔQ „ „	0,04091	0,03994	0,03933	0,03882
Nullpunkt	47,533	45,63	45,697	47,413
Ablesung	90,86	4,18	4,88	88,425
Ablenkung	43,327	41,45	40,817	41,012

$\lambda = 1{,}19752$, $A = 0{,}180253$, $\Phi = 0{,}481756$, $\frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda} = 0{,}59438$;

$A_0 + A_1 = 39{,}82$, $A = 23{,}67$, $\alpha = 2^0\,30'\,17''$, $B = 41{,}65$,

$\Theta = 4^0\,23'\,05{,}2''$; $\Psi(\Theta) = 1{,}002$, $T = 12{,}190$, $W_1 = W_2 = 94{,}07$,

$\frac{\chi'}{\chi} = 0{,}99966$; $\Delta Q = 0{,}03975$, $G = 44{,}24$.

$L_1 = 0{,}04387$ Henry.

Diese drei Resultate zusammenfassend, erhalten wir den Mittelwerth

$$\boldsymbol{L_1 = 0{,}043775 \text{ Henry.}}$$

§ 20. **Die Oberbeck'sche Methode.**

Die zweite in dieser Untersuchung angewendete Methode war die ursprünglich von Oberbeck stammende [1]), in welcher die Rolle von unbekanntem Selbstpotential L_1, aber bekanntem Widerstand W_1 einen Zweig einer Wheatstone'schen Brücke bildete. Eine Rolle (vom Selbstpotential L_0 und Widerstand W_0) eines Elektrodynamometers ersetzte das Galvanometer in dem Galvanometerzweige; ein Sinusinductor I ersetzte die Batterie. Die anderen drei Zweige bestanden aus soviel wie möglich von Selbstpotential und Capacität freien Widerständen. Die zweite Rolle des Elektrodynamometers war in dem Sinusinductorzweige. Die Widerstände werden adjustirt, bis die Ablenkung des Elektrodynamometers verschwindet. Letzteres beweist nicht die Abwesenheit des Stromes in der Rolle des

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. **17**. p. 816 u. 1040. 1882.

Instrumentes, sondern nur einen Phasenunterschied von $\pi/2$ der Ströme in den zwei Rollen. Die mittlere Ebene der zwei Rollen sollte senkrecht sein, um gegenseisiges Potential zwischen den Rollen zu vermeiden.

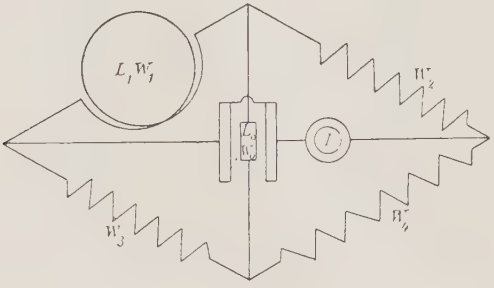

Fig. 2.

Oberbeck vernachlässigt die Wirkung des Selbstpotentials L_0. Die vollkommene L_0, in Betracht ziehende Formel verdanken wir Troje [1]), nämlich:

$$(26) \qquad L_1^2 + \frac{W_2 + W_4}{W_4} \frac{W_3 + W_4}{W_0 + W_2 + W_4} L_0 L_1 = \frac{1}{\pi^2 n^2} \left(W_3 \frac{W_2}{W_4} - W_1 \right) \left(W' + W_1 + W_3 \right),$$

worin

$$W' = \frac{W_0 (W_2 + W_4)}{W_0 + W_2 + W_4},$$

n = die Zahl der Umkehrungen pro Secunde, und $\pi = 3{,}14159\ldots$.

Dieser Ausdruck kann einfacher gemacht werden, wenn $W_2 = W_4$. Unter dieser Bedingung giebt Troje die folgende annähernde Lösung für die Gleichung (26):

$$27) \quad L_1 = \frac{1}{\pi n} \sqrt{(W_3 - W_1)(W' + W_1 + W_3)} - \frac{W_3 + W_4}{W_0 + W_2 + W_4} L_0 .$$

Ich gebrauchte die vollständige Lösung, da ich keinen besonderen Vortheil bei dem Gebrauch der Annäherung sah.

---

1) O. Troje, Wied. Ann. **47.** p. 501. 1892; vgl. auch J. Puluj, Elektrotechn. Zeitschr. Heft 27. p. 348. 1891.

Diese vollkommene Lösung kann die eine oder die andere der zwei Formen annehmen. Wenn L_0 absolut bekannt ist und $W_2 = W_4$, dann

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi^2 n^2}(W_3 - W_1)\left(\frac{2 W_0 W_2}{W_0 + 2 W_2} + W_1 + W_3\right) + \left(L_0 \frac{W_3 + W_2}{W_0 + 2 W_2}\right)^2} \\ \qquad - L_0 \frac{W_3 + W_2}{W_0 + 2 W_2} . \end{array} \right.$$

Wenn andernfalls L_0 nicht absolut bekannt ist, kann man sein Verhältniss zu L_1 durch die Maxwell'sche Methode [1]) oder eine ihrer Modificationen [2]) erhalten. Angenommen, dass $L_0 = a L_1$, dann ist

$$(29) \quad L_1 = \frac{1}{\pi n} \frac{1}{1 + 2 a \frac{W_3 + W_2}{W_0 + 2 W_2}} \sqrt{(W_3 - W_1)\left(\frac{2 W_0 W_2}{W_0 + 2 W_2} + W_1 + W_3\right)} .$$

Ich fand dieses Verhältniss a für Rolle 1 und der beweglichen Rolle des verwendeten Elektrodynamometers, nämlich: $a = 0{,}09470$. Für diese Versuche mit Rolle 2 gebrauchte ich den aus dem gemessenen Werth von L_1 berechneten Werth von L_0, und dann wendete ich die Gleichung (28) an.

Als Quelle der elektromotorischen Kraft benutzte ich einen Sinussinductor, welcher aus einem sich innerhalb einer Rolle drehenden Stahlmagneten bestand. Der Magnet wurde bei hoher Geschwindigkeit von einem Elektromotor durch Riemen und Zahnrad in Bewegung (Uebersetzung 1 : 100) versetzt. Die Geschwindigkeit wurde dadurch berechnet, dass man mit einem Chronometer 75 Umdrehungen des ersten Rades maass. Das entsprach 15 000 Umkehrungen des Stromes. Da der Motor durch eine mit anderen Stromkreisen in Verbindung stehende und für allgemeine Zwecke in dem Gebäude benutzte Accumulatorenbatterie getrieben wurde, war es etwas schwierig, Beständigkeit in der Geschwindigkeit zu erhalten. Viele Beobachtungsfolgen wurden wegen der Unbeständigkeit in der Geschwindigkeit verworfen, welche sich durch die Instabilität

1) J. C. Maxwell, Elect. and Mag. 2. (2. Ausg.) p. 367. 1881.

2) H. S. Carhart and G. W. Patterson, Electr. Measurem. p. 255 ff. 1895.

in dem Gleichgewicht der Wheatstone'schen Brücke zeigte. Wenn das Gleichgewicht stabil blieb, während die Geschwindigkeit gemessen wurde, so erachtete man die letztere als beständig.

Es wird bemerkt, dass die Formeln den Widerstand W_0 der Elektrodynamometerrolle enthalten. Da diese Rolle von feinem Kupferdrahte war, würde sich ihre Temperatur durch die Joule'sche Wirkung erhöht haben, wenn der Strom fortdauernd angewendet worden wäre. Das würde eine entsprechende Vergrösserung des Widerstandes hervorgebracht haben. Da es nicht durchführbar war, den Widerstand W_0 bei jeder Gelegenheit direct zu messen, wurde W_0 ein für alle Mal gemessen und darnach wurde sein Werth wegen der Temperaturänderung corrigirt, wobei als Temperaturcoefficient 0,4 Proc. pro Grad[1]) verwendet wurden. Es wurde angenommen, dass die Temperatur die der umgebenden Luft sei. Diese Annahme konnte nicht zu bemerkenswerthen Fehlern im Endresultat führen, wenn die Temperatur des Raumes constant war, und überdies wurde der Kreis nur in kurzen Zwischenzeiten geschlossen gehalten.

Der Widerstand W_1 der Rolle von unbekanntem Selbstpotential wurde durch die gewöhnliche Wheatstone'sche Brückenmethode sowohl vor als nach jeder Beobachtungsfolge mit dem Wechselstrome gemessen, wozu ein Element statt des Sinusinductors eingeführt wurde.

§ 21. Beobachtungen und Resultate.

Unten werden die Beobachtungen und Resultate für die Rolle 1 gegeben. Zu den Berechnungen wurde Formel (29) benutzt (vgl. Tab. 10).

Der mittlere Werth ist

$$L_1 = 0{,}043867 \text{ Henry},$$

woraus

$$a L_1 = L_0 = 0{,}00415 \text{ Henry}.$$

Der durch diese Methode gefundene Mittelwerth für L_1 (0,043867) stimmt nahezu mit dem der Maxwell-Rayleigh'schen Methode (0,043775), § 19, überein.

1) A. E. Kennelly u. R. A. Fessenden, Phys. Rev. **1.** p. 260. 1893.

Tabelle 10.

	Folge 1		Folge 2		Folge 3	
W_0	16,0° C.	88,68 Ohm	14,0° C.	87,96 Ohm	17,0° C.	89,04 Ohm
W_1	9,6	20,39	11,4	20,55	11,5	20,57
$W_2 = W_4$	16,0	9,443	14,0	9,443	17,0	9,443
W_3	16,0	44,50	14,0	43,65	17,0	43,92
a	0,09470		0,09470		0,09470	
Zwischenzeit für 15000 Umkehr,	51,6 sec		52,6 sec		52,2 sec	
n	290,7 pro sec		285,2 pro sec		287,4 pro sec	
L_1	0,04404		0,04376		0,04380	

§ 22. **Vergleich der Vortheile der beiden Methoden.**

Wenn man die Vortheile der beiden Methoden bei ziemlich grossen Selbstpotentialen vergleicht, müssen viele Thatsachen in Betracht gezogen werden. Die Maxwell-Rayleigh'sche Methode verlangt genaue Widerstände, ein gutes ballistisches Galvanometer und beständige Temperatur. Die Oberbeck'sche Methode erfordert nur ziemlich genaue Widerstände (keine kleinen Aenderungen wie ΔQ der anderen Methoden sind erforderlich), ein empfindliches Elektrodynamometer von relativ hohem Widerstande und geringem Selbstpotential und eine beständige Quelle von elektromotorischer Kraft von Sinusgestalt, aber keine grosse Beständigkeit der Temperatur. Bei sehr kleinen Selbstpotentialen sind die von der Joule'schen Wirkung entstehenden Nachtheile zu gross, um die Maxwell-Rayleigh'sche Methode in Anwendung zu bringen. Daraus können wir schliessen, dass bei der Wahl der Methode die Frage der constanten Temperatur versus constante sinusgestaltige elektromotorische Kraft entscheidend ist.

Die Oberbeck'sche Methode hat den weiteren Vortheil, in gewisser Beziehung eine Nullmethode zu sein, denn man muss zwei Gleichgewichte mit dem Elektrodynamometer erhalten, das eine mit dem Gleich- und das andere mit dem Wechselstrome, welche den zwei andauernden und ballistischen Ablenkungen der anderen Methode entsprechen. Diese letzteren

müssen wegen Unregelmässigkeiten in dem Felde, bez. Dämpfung corrigirt und beide auf eine Function des Winkels, welche nicht durch directe Beobachtung gegeben ist, zurückgeführt werden. Es kann auch eine Correction wegen unvollkommenen Isochronismus in der Bewegung der Rolle nothwendig werden.

Einen Ersatz für diese Nachtheile bietet die Empfindlichkeit des Galvanometers, welche die eines Elektrodynamometers weit übersteigt, wofern diese nicht einen Eisenkern hat. Ein Eisenkern bewirkt, dass das Selbstpotential W_0 eine Function des Stromes und nicht eine constante Grösse wird, was seiner Anwendung unwiderlegliche Einwendungen entgegenzusetzen scheint. Jedoch benutzte Oberbeck[1]) eines mit einem Eisenkern wie Puluj.[2])

In Beziehung auf die zu einer Bestimmung erforderlichen Zeit sind alle Vortheile auf Seite der Oberbeck'schen Methode, durch welche eine Folge von Beobachtungen leicht in einer halben Stunde gemacht werden kann, wenn einmal die Constanten des Kreises bestimmt worden sind. Für die Maxwell-Rayleigh'sche Methode ist ein ganzer Morgen oder Nachmittag erforderlich, wenn eine Folge von vier Beobachtungsreihen genommen wird, indem man die Verbindungen sowohl der Batterie als des Galvanometers umschaltet.

§ 23. Anwendung auf kleine Selbstpotentiale.

Beide Methoden wurden zu der Messung des Selbstpotentials von noch einer Rolle (Rolle 2) angewendet, deren Selbstpotential L_2 viel kleiner, etwa 0,00585 Henry, und deren Widerstand etwa 7,28 Ohm war. Ihre Zeitconstante war etwa 0,0008 Secunde. Bei der Maxwell-Rayleigh'schen Methode war es nothwendig, einen Werth für ΔQ von nur 0,003 Ohm zu benutzen, um eine dauernde Ablenkung zu geben, welche der durch die Umschaltung der Batterie erzeugten ballistischen glich. Wegen des geringen Werthes von L_2 wurde es für nothwendig erachtet, den Widerstand des Galvanometerzweiges auf den möglich niedrigsten Werth zu vermindern

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. **17.** p. 816. 1882.
2) J. Puluj, Elektrotechn. Zeitschr. Heft **27.** p. 348. 1891.

und die Stromstärke durch die Rolle zu vergrössern. Das erste verstärkte die Dämpfung und das zweite die Joule'sche Wirkung. Zufolge des sehr geringen Werthes von ΔQ entstand ein bedeutender Fehler durch von Erhitzung herkommenden Widerstandsveränderungen. Der Mittelwerth der Resultate von sechs Beobachtungsreihen war 0,0057, aber die einzelnen Reihen unterschieden sich bedeutend voneinander, bis zu etwa 5 Proc. Ich bin überzeugt, dass die Rolle von zu geringem Selbstpotential war, um eine befriedigende Anwendung dieser Methode zu gestatten.

Die Oberbeck'sche Methode andererseits gab ziemlich übereinstimmende Resultate mit einem Mittelwerthe für vier Folgen von 0,00585 und eine mittlere Abweichung von 0,00025 oder von etwa 0,5 Proc.

Zweiter Theil.

Die Berechnung von Selbstpotentialen in Ausdrücken der Energie des magnetischen Feldes.

§ 24. Die drei von Maxwell vorgeschlagenen Methoden.

In seiner Schrift „A dynamical Theory of the Electromagnetic Field“[1]) hat Maxwell drei Methoden, um die Coefficienten der elektromagnetischen Induction zu berechnen, vorgeschlagen. In der ersten definirt er als das elektromagnetische Moment (electromagnetic momentum) des einen Kreises, falls durch den anderen ein Einheitsstrom fliesst:

$$M = \int \left(F \frac{dx}{ds'} + G \frac{dy}{ds'} + H \frac{dz}{ds'} \right) ds', \tag{30}$$

worin F, G und H die Componenten des elektromagnetischen Momentes sind, welches dem Einheitsstrom in dem zweiten Kreise entspringt, und ds' ein Längenelement des ersten ist.

Diese Gleichung kann auch die Form

$$M = \iint \mu \frac{ds \,.\, ds'}{r} \cos(ds \,.\, ds') \tag{31}$$

annehmen, welche zuerst von Franz E. Neumann gegeben wurde[2]), worin μ die magnetische Permeabilität des isotrop

1) J. C. Maxwell, Collected Papers **1.** p. 589. 1890; Trans. Roy. Soc. **155.** p. 617. 1865.

2) F. E. Neumann, Abhandlung. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 8. 1845.

und constant vorausgesetzten Mediums ist, und r die Entfernung zwischen ds und ds', welche Elemente der zwei Kreise sind, und einen Winkel $(ds.ds')$ zu einander bilden. In dem Falle des Selbstpotentials gehören ds und ds' demselben Kreise an.

Mit Ausnahme des Factors μ, giebt diese Formel den früheren Begriff von Fernwirkung. Der Factor μ giebt jedoch eine Andeutung, dass etwas in dem umgebenden Raume mit dem Phänomen in Beziehung steht.

In der zweiten Methode wird das gegenseitige Potential durch die Zahl der magnetischen Kraftlinien gemessen, welche durch den einen Stromkreis gehen, wenn der Einheitsstrom durch den anderen fliesst. Wenn eine Kraftlinie mehrmals den Stromkreis schneidet, gilt sie als ebenso viele einzelne Linien; wenn sie aber nur einen Theil des Stromkreises schneidet, so gilt sie als die entsprechende Bruchzahl. Sind die zwei Kreise identisch, so wird das gegenseitige Potential Selbstpotential.

Diese zweite Methode entspricht in ihrem Wesen einer Anwendung des Faraday'schen Begriffes des elektrotonischen Zustandes (electrotonic state)[1]) eines Stromkreises. Maxwell[2]) erklärt das mit den Worten: „The entire electrotonic intensity round the boundary of an element of surface measures the quantity of magnetic induction which passes through that surface, or in other words, the number of lines of magnetic force which pass through that surface."

Diese zwei Methoden, und besonders die erste, haben sich für Physiker zur Berechnung des Selbstpotentials und des gegenseitigen Potentials der Kreise von höchster Brauchbarkeit erwiesen. Maxwell wendete die erste Methode zur Berechnung des Selbstpotentials der Rolle an, welche von der Commission der British Association zu der Bestimmung der B. A.-Widerstandseinheit benutzt worden war.[3]) Vgl. auch Fröhlich[4]), Weinstein[5]) und Stefan.[6])

1) M. Faraday, Experimental Researches, Art. 60. 1839.

2) J. C. Maxwell, Collected Papers. **1.** p. 206. 1890; Trans. Camb. Phil. Soc. **10.** part. 1. p. 65. 1849.

3) J. C. Maxwell, Collected Papers **1.** p. 593. 1890; Elect. and Mag. (2. Ausg.) **2.** p. 316. 1881.

4) J. Fröhlich, Wied. Ann. **19.** p. 106. 1883; **22.** p. 117. 1884.

5) B. Weinstein, Wied. Ann. **21.** p. 329. 1884.

6) J. Stefan, Wied. Ann. **22.** p. 107. 1884.

In der dritten Methode stellt Maxwell das gegenseitige Potential dar, als „that part of the intrinsic magnetic energy of the whole field which depends on the product of the currents in the two circuits, each current being unity. Let α, β, γ be the components of the magnetic intensity at any point due to the first circuit, α', β', γ' the same for the second circuit, then the intrinsic energy of the element of volume dV of the field is

$$\frac{\mu}{8\pi}\left\{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2+(\gamma+\gamma')^2\right\}dV\text{“}. \tag{32}$$

Der dem Product der Ströme abhängige Theil ist

$$\frac{\mu}{4\pi}\left\{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'\right\}dV. \tag{33}$$

Maxwell macht keinen Gebrauch von diesem Ausdrucke, und meines Wissens ist er nie zur Berechnung der Potentiale angewendet worden.

Wenn die zwei Stromkreise identisch sind, so wird dieser Ausdruck (33) die Basis für die Berechnung des Selbstpotentials des Kreises. Das magnetische Feld hat als Werth

$$H=\sqrt{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'}, \tag{34}$$

und das Selbstpotential wird

$$L=\int_{\infty}\frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{H}{I}\right)^2 dV, \tag{35}$$

worin I die Stromstärke ist. Das Integral ist auf das ganze Feld auszudehnen.

Diese Gleichung kann einfacher gewonnen werden dadurch, dass man nur einen Stromkreis betrachtet, und in dieser Weise kam mir zuerst die Idee für diese Methode. Maxwell's Art, die Methode darzulegen, hat jedoch den Vortheil allgemeiner Anwendbarkeit auf gegenseitiges und Selbstpotential.

§ 25. Ableitung der Gleichung $L=\int_{\infty}\frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{H}{I}\right)^2 dV$.

Es ist eine Folge von dem Green'schen Satz[1]), dass die aus der magnetischen Polarisation des Feldes entstehende Energie

1) George Green, Math. Papers, Essay on the application of Math. to elect. and mag. p. 1. 1871; u. J. C. Maxwell, Elect. and mag. (2. Ausg.) **1.** p. 127. 1881; **2.** p. 249 u. 261. 1881.

(36) $$W = \frac{1}{8\pi}\int_{\infty} \mu H^2 \, dV$$

ist. Es ergiebt sich auch aus der Definition des Selbstpotentials eines Kreises in Ausdrücken von elektromotorischer Kraft und Stromstärke, dass die zur Erzeugung eines Stromes im Kreise angewendete Arbeit

(37) $$W = \frac{1}{2} L I^2$$

ist. Aus (36) und (37) ergiebt sich durch Elimination von W

(35) $$L = \int_{\infty} \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{H}{I}\right)^2 dV,$$

wie in § 24 bereits abgeleitet wurde. Die Gleichungen (35) und (36) sind derselben Bedingung unterworfen wie (31), nämlich: dass μ die constante magnetische Permeabilität eines isotropen Mediums ist. Wenn diese Bedingung fehlt, ist L keine bestimmte Grösse des Stromkreises, sondern ist von dem jeweiligen Zustand des Kreises und des ihn umgebenden Feldes abhängig.

Wenden wir Gleichung (35) zu der Berechnung der Selbstpotentiale einiger Kreise an.

§ 26. Anwendung auf ein Solenoid von grosser Länge.

Nehmen wir ein Solenoid von gleichförmigem Querschnitt S und sehr grosser Länge l an, welches aus n Windungen pro Längeneinheit aus einem sehr dünnen bandförmigen Leiter besteht, dessen Dicke vernachlässigt werden kann. Nehmen wir auch an, dass der Isolationsraum zwischen den einander folgenden Windungen unendlich klein ist. Wenn man die Wirkungen der sehr entfernten Enden vernachlässigt, so ist das magnetische Feld innerhalb des Solenoids constant, und ausserhalb desselben Null. Also haben wir den bekannten Ausdruck

(38) $$\frac{H}{I} = 4\pi n.$$

Woraus folgt, dass

(39) $$L = 4\pi\mu n^2 \int dV = 4\pi\mu n^2 l S.$$

Das Selbstpotential pro Längeneinheit ist dann, mit Ausnahme der Enden,

$$\frac{L}{l} = 4\pi\mu S n^2. \tag{40}$$

§ 27. **Anwendung auf ein Ringsolenoid von rechteckigem Querschnitt.**

Betrachten wir zunächst den Fall eines Ringsolenoids von rechteckigem Querschnitt. Nehmen wir die in § 26 gegebenen analogen Bedingungen in Beziehung auf Form und Stellung der Leiter an. Mögen die ganze Anzahl der Windungen N, der innere Radius r_1, und der äussere r_2, und der Axialdurchmesser a sein. Die Stärke des Feldes ist dem reciproken Werthe der Längen der Kraftlinien proportional. Daraus erhalten wir:

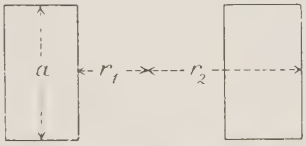

Fig. 3.

$$\frac{H}{I} = 4\pi n = \frac{2N}{r}, \tag{41}$$

und

$$L = \int \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{2N}{r}\right)^2 dV = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{2N}{r}\right)^2 a\, r\, dr\, d\Theta, \tag{42}$$

was bei Durchführung der Integration

$$L = 2a\mu N^2 \log_e\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{43}$$

giebt.

Wenn r_1 und r_2 sehr gross sind, aber sich relativ wenig von dem Mittelradius B unterscheiden, so erhalten wir die gleichen Resultate für das Selbstpotential pro Längeneinheit der Rolle, wie in Formel (40) ausgedrückt, denn Formel (43) annähernd giebt

$$\frac{L}{2\pi B} = \frac{2a\mu(2\pi Bn)^2}{2\pi B}\,\frac{r_2 - r_1}{B}$$

oder

$$\frac{L}{l} = 4\pi\mu S n^2. \tag{40}$$

Diese Form des Ringsolenoids wird gewöhnlich zur Bestimmung von μ bei Eisen und Stahl angewendet. Da μ bei Eisen und Stahl eine Function von H und der jeweiligen Beschaffenheit des Ringes ist, so stellt der erhaltene Werth einen Durchschnitt zwischen den äussersten Werthen für den grössten und geringsten Umfang des Ringes dar (welche Umfänge aus diesem Grunde sich nur wenig unterscheiden sollten); und damit dieser Werth eine bestimmte Bedeutung habe, ist es rathsam, dass der Ring keine magnetische Vergangenheit habe — mit anderen Worten, dass er nie vorher magnetisirt worden sei.

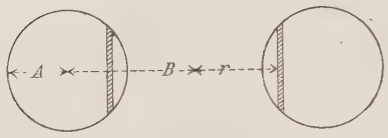

Fig. 4.

§ 28. Anwendung auf ein Ringsolenoid von kreisförmigem Querschnitt.

Wenn das Ringsolenoid einen kreisförmigen Querschnitt hat, so wird die Formel etwas complicirter. Wie vorher ist

$$\frac{H}{I} = \frac{2N}{r}\,, \tag{41}$$

und schreiben wir

$$A = \frac{r_2 - r_1}{2} \quad \text{und} \quad B = \frac{r_2 + r_1}{2}\,,$$

worin A der Radius des Querschnittes und B der Mittelradius des Ringes ist. Nehmen wir als Volumenelement einen Ring von der Dicke dr und Breite

$$2\sqrt{A^2 - (B-r)^2}\,,$$

wie in der Figur 4 gezeigt ist, dann ist

$$dV = 4\pi r\sqrt{A^2 - (B-r)^2}\,dr\,. \tag{44}$$

Indem wir (41) und (44) in (35) setzen, erhalten wir den folgenden Ausdruck

$$L = \int_{r=B-A}^{r=B+A} \frac{4\mu N^2}{r}\sqrt{A^2 - (B-r)^2}\,dr\,. \tag{45}$$

Um diese Gleichung für die Integration vorzubereiten, schreibt man

$$\sqrt{A^2 - (B - r)^2} = A - \chi (B - r) \ ,$$

darauf

$$B - r = \frac{2 A \chi}{1 + \chi^2} \quad \text{und} \quad dr = - \frac{2 A (1 - \chi^2) d\chi}{(1 + \chi^2)^2} \ .$$

Wenn wir diese Substitution vornehmen, erhalten wir

$$(46) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{r = B - A}^{r = B + A} \frac{\sqrt{A^2 - (B - r)^2}}{r} dr = \int_{\chi = + 1}^{\chi = - 1} \frac{2 A^2 (1 - \chi^2)^2 d\chi}{B (1 - \frac{2 A \chi}{B} + \chi^2)(1 + \chi^2)^2} \\ \displaystyle = \int_{\chi = + 1}^{\chi = - 1} \left[\frac{2 (B^2 - A^2)}{B (1 - \frac{2 A \chi}{B} + \chi^2)} - \frac{2 B}{1 + \chi^2} - \frac{4 A \chi}{(1 + \chi^2)^2} \right] d\chi \ . \end{cases}$$

Dieses können wir integriren, wie folgt:

$$(47) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{r = B - A}^{r = B + A} \frac{\sqrt{A^2 - (B - r)^2}}{r} dr = - 2 \sqrt{B^2 - A^2} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{B - A}{B + A}} \right. \\ \qquad \left. - \operatorname{arctg} \left(- \sqrt{\frac{B + A}{B - A}} \right) \right] + 2 B \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] \\ \qquad = \pi (B - \sqrt{B^2 - A^2}) \ . \end{cases}$$

Woraus

$$(48) \qquad L = 4 N^2 \mu \pi (B - \sqrt{B^2 - A^2}) \ .$$

Wenn man einen relativ kleinen Werth für A und grossen für B annimmt, so formt sich die Gleichung (48) um, wie folgt:

$$L = 4 N^2 \mu \pi (B - B + \frac{A^2}{2 B} \text{ etc.}) = 4 N^2 \mu \pi \frac{A^2}{2 B} \quad \text{(annähernd)},$$

und

$$\frac{L}{2 \pi B} = \frac{4 (2 \pi B n)^2 \mu \pi A^2}{4 \pi B^2} = 4 \pi \mu s n^2 \quad \text{(annähernd)}.$$

Wir haben demnach gesehen, dass diese dritte Methode bei den drei verschiedenen Formen des Solenoids dasselbe Resultat liefert, wie die gewöhnlich angewendeten.

§ 29. Anwendung
auf eine kreisförmige Rolle von rechteckigem Querschnitt.

Zunächst betrachten wir den Fall einer kreisförmigen Rolle von rechteckigem Querschnitt, welche aus einem einzelnen Leiter besteht, in welchem der Strom als gleichmässig vertheilt vorausgesetzt wird. Diese letzte besondere Annahme wird gemacht, um zu dem Fall einer Rolle von vielen Windungen zu führen.

Es ist nie eine vollständige Lösung dieser Aufgabe gegeben worden. Die von Maxwell, Stefan, Weinstein und anderen gegeben Formeln sind alle annähernd. Die Schwierigkeit entsteht aus der Vertheilung des Stromes in dem Leiter. In der Methode, welche wir betrachten, begegnen wir dieser Schwierigkeit ebenfalls.

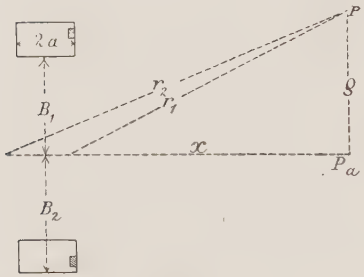

Fig. 5.

Betrachten wir das magnetische Feld, welches aus einem Kreiselemente des Ringes entsteht. Das magnetische Feld in einem Punkte auf der Axe der Rolle kann einfach in Ausdrücken der Dimensionen des Elementes und der Entfernung des Punktes dargestellt werden. Mögen B der Radius, dB die Dicke, und da die Axiallänge des Elementes und i die Stromstärke pro Querschnittseinheit sein. Die Feldstärke in einem Punkte P_a der Axe, entfernt x von der mittleren Ebene des Elementes, ist (Fig. 5)

$$(49) \quad d^2 H_a = 2\pi B i \, dB \, da \frac{B}{(B^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi i B^2}{(B^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dB \, da \, .$$

Wegen der Symmetrie muss dieses Feld die Richtung der Axe haben.

Das von diesem Element in demselben Punkte hervorgebrachte Potential ist

$$(50) \; d^2 V_a = -2\pi i \int \left[\frac{B^2 \, dB \, da}{(B^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dx = 2\pi i \left[\frac{x}{\sqrt{B^2 + x^2}} - c \right] dB \, da \, ,$$

worin c eine Integrationsconstante ist, deren Werth von der Stellung des Punktes abhängt, auf welchem das Potential dem Herkommen nach als Null angenommen wird.

Zunächst integriren wir Gleichung (50) für die ganze Rolle, unter der Bedingung, dass V_a gleich Null in dem Mittelpunkte der Rolle ist. Es ist zu erwähnen, dass dx anstatt da bei der Integration gesetzt werden kann. Mögen B_1 und B_2 der innere bez. der äussere Radius der Rolle und $2a$ ihre Axiallänge sein, und setzen wir diese Grenzen ein, so ergiebt sich:

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} V_a = 2\pi i \Bigg[& \frac{B_2\left(\sqrt{B_2^2+(x+a)^2}-\sqrt{B_2^2+(x-a)^2}\right)}{2} \\ & -\frac{B_1\left(\sqrt{B_1^2+(x+a)^2}-\sqrt{B_1^2+(x-a)^2}\right)}{2} \\ & +\frac{(x+a)^2}{2}\log\frac{B_2+\sqrt{B_2^2+(x+a)^2}}{B_1+\sqrt{B_1^2+(x+a)^2}} \\ & -\frac{(x-a)^2}{2}\log\frac{B_2+\sqrt{B_2^2+(x-a)^2}}{B_1+\sqrt{B_1^2+(x-a)^2}}\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

In dieser Gleichung bedeutet x die Entfernung des Mittelpunktes der Rolle von P_a.

Um das Potential in einem Punkte ausserhalb der Axe zu erhalten, können wir die Laplace'sche Gleichung gebrauchen.[1]) Sie lautet:

$$(52)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

und nimmt die folgende Form an, wenn wir die Axe der Rolle als x-Axe wählen, und wenn der angenommene Punkt in einer Entfernung ϱ von der Axe ist:

$$(53)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}=0.$$

Nehmen wir an

$$(54)\quad V = A_0 + A_2\varrho^2 + A_4\varrho^4 + A_6\varrho^6 \text{ etc.}$$

Ungerade Potenzen von ϱ können nicht eintreten, da die Formel für Plus- und Minuswerthe von ϱ die gleiche sein

1) E. Mascart et J. Joubert, El. et Mag. (2. Ausg.) 1. p. 396. 1896.

muss. Bestimmen wir die Coefficienten A_0, A_2 etc., dann ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 A_{2n}}{\partial x^2} + (2n+2)^2 A_{2n+2} = 0 . \tag{55}$$

A_0 ist offenbar gleich V_a, das Potential in einem Axialpunkt ($\varrho = 0$), und demnach haben wir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_2 = \frac{1}{2^2}\frac{\partial^2 V_a}{\partial x^2}; & A_4 = \frac{(-1)^2}{2^2 . 4^2}\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}; \\ \cdots\cdots\cdots & A_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^2 . 4^2 \ldots (2n)^2}\frac{\partial^{2n} V}{\partial x^{2n}}; \text{ etc.} \end{array} \right. \tag{56}$$

Wenn diese Werthe (56) in (54) eingesetzt werden, so formt sich die Gleichung nunmehr um in:

$$V = V_a - \frac{\varrho^2}{2^2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\varrho^2}{2^2 . 4^2}\frac{\partial^4 V_a}{\partial x^4} - \text{etc.} \tag{57}$$

Diese Gleichung gilt, wenn die Reihe convergent ist, was der Fall ist für Punkte nahe der Axe. Wenn ϱ grösser ist als B_1, dann scheint die Reihe ihre Convergenz zu verlieren. Das zeigt sich dadurch, dass man Gleichung (51) entwickelt und den Werth von V_a in (57) einsetzt.

Für weiter von der Axe entfernte Punkte können wir eine ähnliche Formel aufstellen:

$$V = D_0 + \frac{D_2}{\varrho^2} + \frac{D_4}{\varrho^4} \text{ etc.}, \tag{58}$$

welche auch der Laplace'schen Gleichung genügen muss. Daraus ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 D_{2n+2}}{\partial x^2} + (2n)^2 D_{2n} = 0 . \tag{59}$$

Es scheint unmöglich, die Werthe von D_2, D_4 etc. aus der Gleichung (59) abzuleiten, da bei jeder Integration eine unbekannte Constante auftritt. In diesem Punkte ist der Fortschritt vollständig gehemmt..

§ 30. Einführung von Kugelfunctionen.

Eine vielversprechende Art die allgemeine Aufgabe anzugreifen, scheint in der Einführung von Kugelfunctionen (Polynômes de Legendre)[1]) zu liegen. Betrachten wir das Potential,

1) E. Mascart et J. Joubert, El. et Mag. (2. Ausg.) **1.** p. 400. 1896.

das von einem Ringelement der Rolle an irgend einem Punkte in der Entfernung r von dem Mittelpunkt des Ringelementes hervorgebracht wurde. Das Potential ist gleich dem einer von einem Ringelement begrenzten magnetischen Schale, deren Stärke dem Strom in dem Ringelement pro Axiallängeeinheit numerisch gleich ist.

Das Potential einer cylindrischen Schale von gleicher Dicke wie das Ringelement wird durch Integration über die correspondirende Schale gefunden. Das Resultat ist das aus einer gleichwerthigen magnetischen Blattgrösse an jeder der Endflächen sich ergebende, und kann in der einen oder der anderen Form ausgedrückt werden, je nachdem die Entfernung des Punktes P von dem Mittelpunkte des Cylinderendes grösser oder kleiner ist als der Radius des Cylinders.

Mögen $P_1^{(n)}$ (die Kugelfunction), V_1, und r_1 dem rechten, und $P_2^{(n)}$, V_2 und r_2 dem linken Ende entsprechen. Wenn $r_1 > B$, erhalten wir

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} dV_1 &= 2\pi i B dB \left[\frac{1}{2} \frac{B}{r_1} - \frac{P_1^{(2)}}{2.4} \left(\frac{B}{r_1}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 P_1^{(4)}}{2.4.6} \left(\frac{B}{r_1}\right)^5 - \frac{3.5\, P_1^{(6)}}{2.4.6.8} \left(\frac{B}{r_1}\right)^7 + \text{etc.} \right], \end{aligned} \right.$$

und wenn $r_1 < B$, erhalten wir

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} dV_1 &= 2\pi i B dB \left[1 - P_1^{(1)} \frac{r_1}{B} + \frac{P_1^{(2)}}{2} \left(\frac{r_1}{B}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_1^{(4)}}{2.4} \left(\frac{r_1}{B}\right)^4 + \frac{3 P_1^{(6)}}{2.4.6} \left(\frac{r_1}{B}\right)^6 - \frac{3.5\, P_1^{(8)}}{2.4.6.8} \left(\frac{r_1}{B}\right)^8 \text{etc.} \right) \Big] \end{aligned} \right.$$

mit ähnlichen Ausdrücken für dV_2.

Das aus der ganzen Rolle erhaltene Potential wird durch Integration in Beziehung auf B in geeigneten Grenzen gefunden. Im Falle, dass $B_1 < r_1$ (bez. r_2) $< B_2$, wird der richtige Ausdruck durch Integration von (60) zwischen B_1 und r_1 (bez. r_2) und von (61) zwischen r_1 (bez. r_2) und B_2, und, indem man die Resultate addirt, erhalten.

Aehnliche Ausdrücke können für V_1 und V_2 erhalten werden. Das Gesammtpotential wird durch Subtraction erreicht.

$$V = V_1 - V_2 .$$

Wenn $r_1 > B_2$, haben wir

$$(63)\quad \begin{cases} V_1 = 2\pi i \left[\dfrac{1}{3.2} \dfrac{1}{r_1}(B_2^3 - B_1^3) - \dfrac{B_2^5 - B_1^5}{5.2.4} \dfrac{P_1^{(2)}}{r_1^3} \right. \\ \quad \left. + \dfrac{3(B_2^7 - B_1^7)}{7.2.4.6} \dfrac{P_1^{(4)}}{r_1^5} - \text{etc.} \right]; \end{cases}$$

und wenn $r_1 < B_1$, haben wir

$$(64)\quad \begin{cases} V_1 = 2\pi i \left[(B_2^2 - B_1^2) - 2P_1^{(1)} r_1 (B_2 - B_1) + \dfrac{P_1^{(2)} r_1^2}{2} \log \dfrac{B_2}{B_1} \right. \\ \quad \left. - \dfrac{P_1^{(4)} r_1^4}{2.2.4} \left(\dfrac{1}{B_1^2} - \dfrac{1}{B_2^2} \right) + \dfrac{3.P_1^{(6)} r_1^6}{4.2.4.6} \left(\dfrac{1}{B_1^4} - \dfrac{1}{B_2^4} \right) - \text{etc.} \right]; \end{cases}$$

und wenn $B_1 < r_1 < B_2$, haben wir

$$(65)\quad \begin{cases} V_1 = 2\pi i \left[\left\{ (B_2^2 - r_1^2) - P_1^{(1)} r_1 (B_2 - r_1) + \dfrac{P_1^{(2)} r_1^2}{2} \log \dfrac{B_2}{r_1} \right. \right. \\ \quad \left. - \dfrac{P_1^{(4)} r_1^4}{2.2.4} \left(\dfrac{1}{r_1^2} - \dfrac{1}{B_2^2} \right) + \text{etc.} \right\} + \left\{ \dfrac{r_1^3 - B_1^3}{3.2 r_1} \right. \\ \quad \left. \left. - \dfrac{r_1^5 - B_1^5}{5.2.4} \cdot \dfrac{P_1^{(2)}}{r_1^3} + \text{etc.} \right\} \right]. \end{cases}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für V_2 werden erhalten, wenn man r_2 bez. $P_2^{(n)}$ anstatt r_1 bez. $P_1^{(n)}$ einsetzt. Bei der Einsetzung in die Gleichung (62) der Ausdrücke für V_1 und V_2 muss man darauf achten, dass man eine convergente Reihe wählt. Alle drei Reihen, (63), (64), (65), convergiren unter den festgesetzten Bedingungen schneller als eine geometrische Reihe.

Um H^2 (das Quadrat der Feldstärke) zu erhalten, ist es nöthig, die zwei Differentialquotienten von V nach x und ϱ zu quadriren und zu addiren, d. h.

$$(66)\qquad H^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho} \right)^2.$$

Zu diesem Zwecke müssen (63), (64) und (65) in Termen von x und ϱ ausgedrückt werden. Zur Vereinfachung können wir schreiben $x_1 = x - a$ und $x_2 = x + a$, dann ist $r_1^2 = x_1^2 + \varrho^2$ und $r_2^2 = x_2^2 + \varrho^2$. Die folgenden Formeln sind die Werthe der Kugelfunctionen in Termen von r und ϱ ausgedrückt.[1])

1) Vgl. I. Todhunter, Laplace's Functions, etc. p. 4. 1875.

$$P_1^{(1)} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\varrho^2}}, \quad P_1^{(2)} = \frac{3}{2}\frac{x_1^2}{x_1^2+\varrho^2} - \frac{1}{2}, \quad P_1^{(4)} = \frac{5.7}{2.4}\frac{x_1^4}{(x_1^2+\varrho^2)^2}$$
$$- \frac{3.5}{2.4}\frac{2x_1^2}{x_1^2+\varrho^2} + \frac{1.3}{2.4}, \quad P_1^{(6)} = \frac{7.9.11}{2.4.6}\frac{x_1^6}{(x_1^2+\varrho^2)^3}$$
$$- \frac{5.7.9}{2.4.6}\frac{3x_1^4}{(x_1^2+\varrho^2)^2} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{3x_1^2}{x_1^2+\varrho^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6}, \text{ etc.}$$

Aehnliche Werthe gelten für das andere Ende der Rolle.

Das Selbstpotential der Rolle wird also gefunden, wenn man diesen verwickelten Ausdruck für H^2 durch den ganzen Raum integrirt und das Resultat mit $\mu / 4\pi I^2$ multiplicirt, worin I der Gesammtstrom in der Rolle ist. Es ist zu erwähnen, dass das früher angewendete i der Strom pro Flächeneinheit ist.

Also erscheint es möglich, das Selbstpotential einer solchen Rolle durch diese dritte Methode zu berechnen. Die praktischen Schwierigkeiten einer solchen Berechnung sind jedoch sehr gross, ausser wenn a und $B_2 - B_1$ sehr klein im Vergleich zu B_1 sind. Ich komme deshalb zu dem Schlusse, dass, wenn diese Methode nicht weiter vereinfacht werden kann, sie praktisch nicht anwendbar ist. Ich hoffe, dass jemand im Stande sein wird, eine Vereinfachung zu finden.

Zum Schlusse möchte ich Hrn. Prof. Dr. Ritter von Lommel, Rector Magnificus der kgl. Ludwig-Maximilians-Universität, Hrn. Prof. Dr. Graetz und Hrn. Prof. Dr. Seeliger meinen tiefgefühlten Dank aussprechen. Die genannten Herren haben mich bei meiner Arbeit durch ihren Rath bereitwilligst unterstützt. Hr. Prof. Dr. Lindemann stellte mir freundlichst Bücher aus dem mathematischen Seminar zur Verfügung.

München, Physikal. Inst. der kgl. Ludwig-Maximilians-Universität, den 12. Mai 1899.

Curriculum Vitae.

Verfasser dieser Arbeit, George W. Patterson jun., ist am 1. Februar 1864 zu Corning (New-York) U. S. Amerika geboren. Er besuchte die „Academies“ zu Corning und Westfield (New-York) in den Jahren 1870—1880, die Yale-Universität zu New-Haven 1880—1884, das Massachusetts-Institute of Technology zu Boston 1885—1887, und die Harvard-Universität zu Cambridge 1888—1889.

Er erhielt die Grade B. A. bez. M. A. von der Yale-Universität in den Jahren 1884 bez. 1891, und B. Sc. von dem Massachusetts-Institute of Technology im Jahre 1887.

Im Jahre 1887—1888 war er Assistent an dem Massachusetts-Institute of Technology. In den Jahren 1889—1891 war er Instructor, und 1891—1897 Assistant-Professor an der Michigans-Universität zu Ann Arbor, wo er jetzt Junior-Professor ist.